

LIBRIS

We know
books
ANCUȚA HEISU
VLAD HEISU

MATEMATICĂ.
CULEGERE DE PROBLEME
CLASA A XI-A - profil pedagogic

Referent științific: Prof. univ. emerit
dr. Dorel I. Duca

ARGUMENT	3
I. LEGI DE COMPOZIȚIE. PROPRIETĂȚI.....	5
1.1 Legi de compoziție. Parte stabilă.....	5
1.2 Proprietatea de comutativitate	8
1.3 Proprietatea de asociativitate	10
1.4 Element neutru.....	13
1.5 Elemente simetrizabile	15
1.6 Probleme recapitulative	19
II. STRUCTURI ALGEBRICE	24
2.1 Monoid	24
2.2 Grup.....	27
2.3 Inel.....	29
2.4 Corp	32
2.5 Inelul claselor de resturi modulo n	35
2.6 Probleme recapitulative	37
III. TESTE RECAPITULATIVE	42
IV. INDICAȚII ȘI SOLUȚII.....	52
1. LEGI DE COMPOZIȚIE. PROPRIETĂȚI	52
1.1 Legi de compoziție. Parte stabilă.....	52
1.2 Proprietatea de comutativitate	55
1.3 Proprietatea de asociativitate	56
1.4 Element neutru.....	58
1.5 Elemente simetrizabile	60
1.6 Probleme recapitulative	62
II. STRUCTURI ALGEBRICE	68
2.1 Monoid	68
2.2 Grup.....	70
2.3 Inel.....	72
2.4 Corp	74
2.5 Inelul claselor de resturi modulo n	76
2.6 Probleme recapitulative	80
III TESTE RECAPITULATIVE	85
BIBLIOGRAFIE	98

I. LEGI DE COMPOZIȚIE. PROPRIETĂȚI

1.1 Legi de compoziție. Parte stabilă

1. Pe mulțimea \mathbb{R} se definește legea de compoziție

$$x \circ y = x + y - 2. \text{ Calculați:}$$

a) $1 \circ 2, 2 \circ 7, 0 \circ 5, 3 \circ 3.$

b) $2 \circ x, x \circ 3, 3 \circ y, 5 \circ a.$

c) $y \circ x, x \circ a, a \circ z, y \circ z.$

d) $x \circ x, x \circ x \circ x, (x \circ y) \circ z, x \circ (y \circ z),$ pentru $x, y, z, a \in \mathbb{R}.$

e) Arătați că mulțimea $H = [2, \infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} , în raport cu legea de compoziție „ \circ ”.

2. Pe mulțimea \mathbb{R} se definește legea de compoziție

$$x \circ y = x + y + 1. \text{ Calculați:}$$

a) $2 \circ 3, 1 \circ 3, 2 \circ 5, 10 \circ (-2).$

b) $3 \circ x, x \circ 1, z \circ 2, 2 \circ z, y \circ x, x \circ a, a \circ z, z \circ a.$

c) $x \circ x, x \circ x \circ x, (x \circ y) \circ z, x \circ (y \circ z),$ pentru $x, y, z, a \in \mathbb{R}.$

d) Arătați că $x \circ y \in [-1, \infty)$, pentru orice $x, y \in [-1, \infty).$

3. Pe mulțimea \mathbb{R} se definește legea de compoziție

$$x \circ y = xy + x + y. \text{ Calculați:}$$

a) $2 \circ (-1), (-1) \circ 3, 5 \circ 1, 100 \circ (-1).$

b) $x \circ (-1), (-1) \circ x, 2 \circ y, a \circ z.$

c) $y \circ x, z \circ a, x \circ b, y \circ z.$

d) $x \circ x, x \circ x \circ x, (x \circ y) \circ z, x \circ (y \circ z),$ pentru $x, y, z, a, b \in \mathbb{R}.$

e) Arătați că $x \circ y \geq -1$, pentru orice $x \geq -1$ și orice $y \geq -1.$

4. Pe mulțimea \mathbb{R} se definește legea de compoziție

$$x \circ y = xy - x - y + 2. \text{ Calculați:}$$

- $10 \circ 1, 11 \circ 1, 1 \circ 2, 3 \circ 4.$
- $x \circ 1, 1 \circ y, 3 \circ x, a \circ (-1).$
- $y \circ x, x \circ a, a \circ z, z \circ a.$
- $x \circ x, x \circ x \circ x, (x \circ y) \circ z, x \circ (y \circ z),$ pentru $x, y, z, a \in \mathbb{R}.$
- Arătați că $x \circ y \geq 1, \forall x \geq 1$ și $\forall y \geq 1.$

5. Pe mulțimea \mathbb{R} se definește legea de compoziție

$$x \circ y = x + y + 7.$$

- Rezolvați ecuația $x \circ x = 3,$ în $\mathbb{R}.$
- Rezolvați ecuația $x \circ x \circ x = 17,$ în $\mathbb{R}.$
- Calculați $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{x \text{ de } 10 \text{ ori}}.$
- Determinați perechile de numere naturale (m, n) pentru care $m \circ n = 10.$
- Arătați că $x \circ y \in (-7, \infty), \forall x, y \in (-7, \infty).$

6. Pe mulțimea \mathbb{R} se definește legea de compoziție

$$x * y = x + y - 3.$$

- Rezolvați ecuația $x * x = 1,$ în $\mathbb{R}.$
- Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $x * x * x * x = -8.$
- Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $\underbrace{x * x * \dots * x}_{x \text{ de } 10 \text{ ori}} = 63.$
- Determinați perechile de numere naturale (m, n) pentru care $m * n = 1.$
- Arătați că $x * y \geq 3, \forall x \geq 3$ și $\forall y \geq 3.$

7. Pe mulțimea \mathbb{R} se definește legea de compoziție

$$x \circ y = xy + 2x + 2y + 2.$$

- a) Calculați $2 \circ 3$.
- b) Demonstrați că $x \circ y = (x + 2)(y + 2) - 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- c) Rezolvați ecuația $x \circ x = 7$, în \mathbb{R} .
- d) Rezolvați ecuația $(2x + 1) \circ 3 = 7$, în \mathbb{R} .
- e) Rezolvați inecuația $x \circ x \leq x$, în \mathbb{Z} .

8. Pe \mathbb{R} , fie $x \circ y = x^2 + y^2 - 2x - 2y$.

- a) Calculați $1 \circ 2$.
- b) Rezolvați ecuația $x \circ 1 = 2$, în \mathbb{R} .
- c) Rezolvați inecuația $2 \circ x \leq 3$, în \mathbb{Z} .
- d) Arătați că $x \circ y \geq -2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- e) Rezolvați ecuația $m \circ n = -2$, în mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

9. Pe \mathbb{R} , fie $x \circ y = 2(x - 1)(y - 1) + 1$.

- a) Calculați $1 \circ 2$.
- b) Arătați că $x \circ 1 = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- c) Rezolvați ecuația $x \circ x = x$, în \mathbb{R} .
- d) Demonstrați că mulțimea $H = [1, \infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} , în raport cu legea de compoziție „ \circ ”.
- e) Rezolvați ecuația $2^x \circ 2 = 3$, în \mathbb{R} .

10. Pe mulțimea \mathbb{R} se definește legea de compoziție

$$x * y = 3xy + x + y.$$

- a) Arătați că $1 * 2 = 9$.
- b) Arătați că $x * y = y * x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- c) Verificați dacă $x * 0 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- d) Rezolvați ecuația $(-2) * x = 8$, în \mathbb{R} .
- e) Rezolvați ecuația $2^x * 1 = 17$, în \mathbb{R} .

1.2 Proprietatea de comutativitate

1. Studiați comutativitatea următoarelor legi de compoziție definite pe \mathbb{R} :

a) $x \circ y = x + y - 10$.

b) $x \circ y = 2x + y + 3$.

c) $x \circ y = 2x + 8y - 7$.

d) $x \circ y = 1 - x + y$.

2. Studiați comutativitatea următoarelor legi de compoziție definite pe \mathbb{R} :

a) $x \circ y = 2xy + x + y$.

b) $x \circ y = 2xy - x - y$.

c) $x \circ y = 2(x + y) - 3xy$.

d) $x \circ y = xy - x - y + 2$.

3. Studiați comutativitatea următoarelor legi de compoziție definite pe \mathbb{R} :

a) $x \circ y = x^3 + y^3$.

b) $x \circ y = 2^{xy} + x + y$.

c) $x \circ y = x^2 + xy + y^2$.

d) $x \circ y = x^2 + x + y^2 + y$.

4. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție $x * y = x + y + 7$.

a) Calculați $1 * 2$.

b) Arătați că legea este comutativă.

c) Rezolvați ecuația $(2x + 1) * (x + 3) = 4$, în \mathbb{R} .

d) Rezolvați ecuația $x^2 * x = 9$, în \mathbb{R} .

5. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y - 1$.

- a) Calculați $3 \circ 5$.
- b) Arătați că legea este comutativă.
- c) Rezolvați inecuația $(2x - 3) \circ 7 \leq 10$, în \mathbb{R} .
- d) Rezolvați ecuația $(2x^2) \circ (3x) = 4$, în \mathbb{R} .

6. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție $x * y = 2x + 2y - 2$.

- a) Calculați $2 * 3$.
- b) Arătați că legea este comutativă.
- c) Verificați dacă $(x + 1) * (1 - x) = 2, \forall x \in \mathbb{R}$.
- d) Rezolvați ecuația $2^x * 1 = 8$.

7. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție

$$x * y = (x - 1)(y - 1) + 1.$$

- a) Calculați $1 * 3$.
- b) Arătați că legea este comutativă.
- c) Demonstrați că $a * 1 = 1 * a = 1$, pentru orice a din \mathbb{R} .
- d) Rezolvați ecuația $(\log_2 x) * 2 = 6, x > 0$.

8. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$.

- a) Calculați $3 \circ (-1)$.
- b) Arătați că legea este comutativă.
- c) Demonstrați că $x \circ y = (x + 1)(y + 1) - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- d) Rezolvați inecuația $(x + 1) \circ (x + 1) \leq 3$, în \mathbb{Z} .

9. Pe $M = (-1, 1)$ se definește legea de compoziție

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

- a) Calculați $\frac{1}{2} * \frac{1}{2}$.
- b) Arătați că legea este comutativă.